ANÁLISE NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES PREDADOR-PRESA

T. V. RODRIGUES LIMA[1], O. E AIELO[2]

RESUMO: Neste trabalho apresentamos o estudo dos modelos matemáticos tradicionalmente utilizado para descrever a dinâmica de população envolvendo predadores e presas (equações de Lotka-Volterra). Para isso foi realizado soluções numérica das equações predador-presa pelo método Range-Kutta de quarta ordem e análise da estabilidade do sistema em torno dos pontos de equilíbrio estável.

PALAVRAS-CHAVE: LOTKA-VOLTERRA, DINÂMICA POPULACIONAL, ESTABILIDADE DE SISTEMAS

INTRODUÇÃO

O foco deste estudo será baseado no modelo de dinâmica populacional proposto por Vito Volterra (1926) e Alfred Lotka (1932), que considera interações entre duas espécies que vivem em um mesmo ambiente, onde uma delas se alimenta da outra, que por sua vez se alimenta de outros recursos, por exemplo, o clássico caso do lince canadense (predador) e lebre americana (presa). O modelo ficou conhecido como Lotka-Volterra que descreve a dinâmica populacional do sistema tipo predador-presa, através de um par de equações diferencias, não lineares de primeira ordem, que é o modelo mais simples a descrever interações entre duas espécies. O modelo estuda o comportamento temporal das populações de duas espécies distintas de animais coexistindo numa certa região (BOYCE, 2006, TOMÉ, 2001).

Modelo Predador-Presa

[1] Estudante, Curso Superior em Licenciatura em Ciências Biológicas, IFSP Câmpus Barretos, Av. C-1, 250, CEP 14.781-502, Barretos, SP, tiagoventura01@hotmail.com

[2] Professor, Prof. Doutor, IFSP Câmpus Barretos, Av. C-1, 250, CEP 14.781-502, Barretos, SP, aiello@ifsp.edu.br

O modelo representa um exemplo de descrição de um fenômeno não-linear, que considera apenas duas espécies. O modelo apresenta duas componentes: x e y, que são respectivamente o número de presas e predadores presentes em uma população. Tais equações não descrevem completamente as complexas relações existentes na natureza, entretanto é um modelo simples e um importe passo para entender os complexos fenômenos de interação que acontece na natureza (BEGON, 2007; MOREIRA, 2012).

Boyce (2006) descreve que para modelagem do sistema predador-presa, considera-se um ambiente fechado, em que exista duas populações em situação em que uma das espécies y se alimenta da outra x , e a x se alimenta de outro tipo de comida e adota-se as seguintes hipóteses:

- Na ausência de consumidores (predadores), $y(t) = 0$, a população de presas aumenta exponencialmente (taxa proporcional à população atual), ou seja, sem nenhum tipo de resistência: assim, resultando em $dx/dt = ax$, onde a é uma constante positiva ($a > 0$).
- Taxas que dependem da frequência com que os predadores e presas se encontre, sendo elas proporcionais ao produto das duas populações. Esses encontros tende a diminuir o crescimento da população de presas e aumentar a de predadores. Portanto a taxa de crescimento da população de predadores é aumentada pelo termo γxy e taxa de crescimento da população de presas é diminuída pelo termo $-\alpha xy$, onde α e γ são constantes positivas (α e $\gamma > 0$).
- Na ausência de presas, o predador é levado a extinção, pois faltará alimento para o mesmo, sendo descrito pelo termo $dy/dt = -cx$, onde c é uma constante positiva ($c > 0$).

Assumindo as hipóteses acima, temos o par de equações do modelo predador-presas:

$$dx/dt = ax - \alpha xy = x(a - \alpha y)$$

(1)

$$dy/dt = -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x)$$

Modelo Predador-Presa com saturação

Para o modelo com saturação adiciona-se a equação 1 de presas (dx/dt) o termo do tipo ($-kx^2$) com k sendo uma constante positiva. (BOYCE, 2006; SOBRINHO, 2015)

Modelo Predador-Presa com extinção

O modelo que apresenta extinção pode ser descrito por meio do modelo predado-presa com saturação, sendo que a principal diferença entre eles, está no valor atribui a constante que está relacionada a dependência da sobrevivência de predadores na ausência ou diminuição da população de presas, portanto, relacionado com o valor da constante c (BOYCE, 2006; SOBRINHO, 2015).

MATERIAIS E MÉTODOS

Utilizou-se a linguagem de programação FORTRAN e o método de Range-Kutta de 4°ordem para a solucionar numericamente as equações de Lotka-Volterra (modelo predador-presa), modelo predador-presa com saturação e modelo predador-presa com extinção. Os gráficos foram gerados com software Origin® 6.0.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Modelo Predador-Presa

Para a = 1.0, c = 0.75, α = 0.5, γ = 0,5 temos os resultados da:

✓ Figura 1 (a) apresentando curvas fechadas (orbitas fechadas) em torno de um ponto de equilíbrio, representando assim, uma variação cíclica das populações descritas pelo modelo Predador-Presa. Verifica-se que o sistema apresenta um equilíbrio estável em torno das populações x(t) = 1,5 e y(t) = 2,0.

✓ Figura 1 (b) é possível ver uma relação entre a população de presas e predadores, na qual, elas apresentam variações cíclicas, essas oscilações são típicas do modelo Lotka-Volterra e independente dos valores escolhidos para as condições iniciais ou para os parâmetros, tais oscilações ocorrerá. Podemos notar que conforme a população de presas aumenta, o número de predadores também cresce, isso ocorre devido a disponibilidade de alimento (presas), assim, aumentando a predação e diminuído o crescimento das presas, resulta posteriormente em uma diminuição da população de presas. A população de predadores irá atingir o seu máximo, e devido à falta de alimento começará a diminuir também. Com essa diminuição da população de predadores, a predação também irá diminuir, isso faz com que a população de presas, que atingiu um valor mínimo, volte a crescer. Dessa forma o sistema apresenta oscilações com períodos e amplitudes constantes ao longo do tempo.

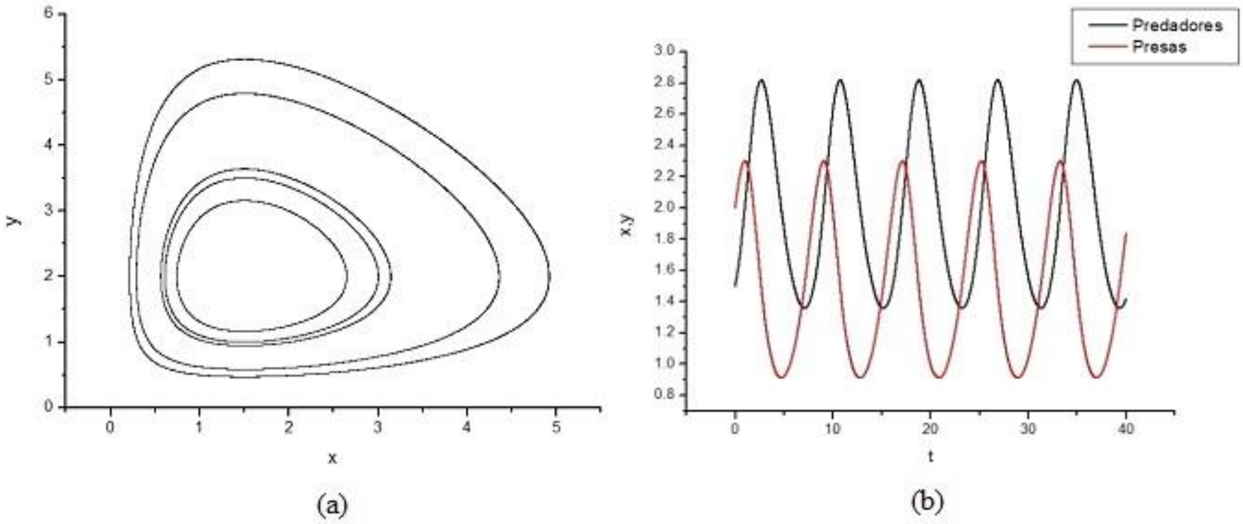

Figura 1: (a) Representação da solução do modelo predador-presa para várias condições iniciais de presas (x) e predadores (y). (b) variações da população de presa (x) e predadores (y) em função do tempo para condição inicial ($x = 2{,}0$ e $y = 1{,}5$).

Modelo Predador-Presa com saturação

Para a = 1.0, c = 0.75, α = 0.5, γ = 0,5, k=0.5, temos:

✓ Figura 2 (a) observa-se uma estabilidade assintótica, onde independente das populações de presa e predadores iniciais, as populações exibem uma evolução assintótica para condição estacionária estável (x = 1,5 e y = 0,5).

✓ Figura 2 (b) observa-se a dependência da população de presas e predadores no tempo. Pode-se notar a saturação de predadores e presas para as populações respectivamente de 0,5 e 1,5 para tempos maiores de 20 (t>20).

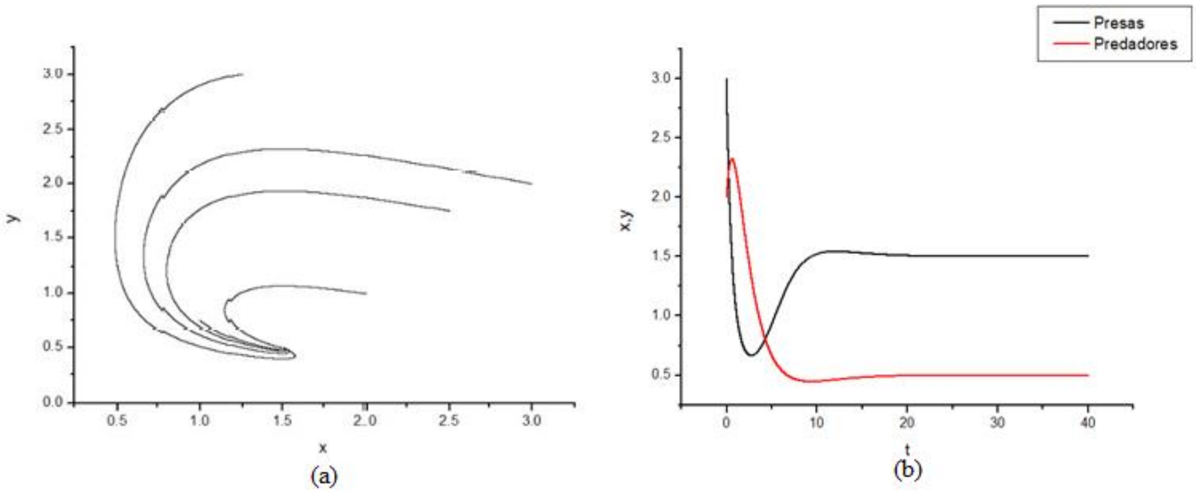

Figura 2: (a) Populações de predadores (y) e presas (x) seguindo um campo de direções, para diversão condições iniciais de x e y. (b) Variação da população de predadores (y) e presas (x) em função do tempo (t), para condição de x = 3,0 e y = 2,0.

Modelo Predador-Presa com extinção

Para a = 1.0, c = 1.5, α = 0.5, γ = 0,5, k=0.5, temos:

✓ Figura 3 (a) observa-se uma estabilidade assintótica, onde independente das populações de presa e predadores iniciais, as populações exibem uma evolução assintótica para condição estacionária estável (x = 2,0 e y = 0).

✓ Figura 3 (b) nota-se que devido ao aumento da constante c o sistema apresentou uma alta mortalidade dos predadores, levando-o a extinção.

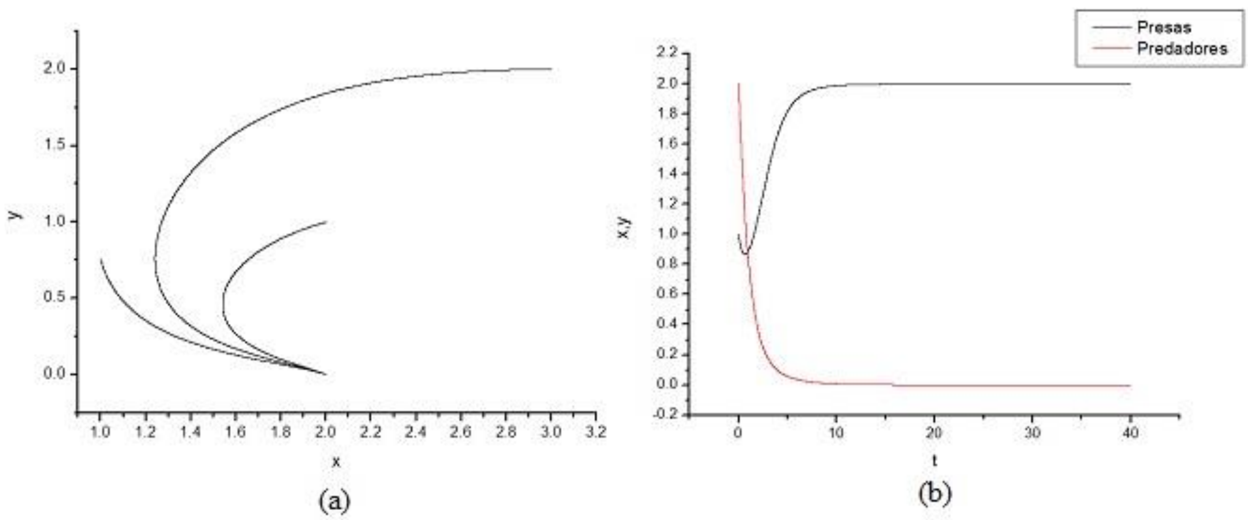

Figura 3: (a) Campos de direções das populações de predadores (y) e presas (x), para várias

condições iniciais de x e y. (b) Variações das populações de predadores (y) e presas (x) em função do tempo (t), para condição inicial de $x = 1,0$ e $y = 2,0$.

.

CONCLUSÕES

Os modelos predador-presa apesar de não descrever a complexas relações existentes na natureza, é um primeiro passo para o entendimento das interações do tipo predador-presa, podendo ser de grande ajuda, por exemplo, no controle biológico de pragas, onde o objetivo é inserir predadores criados em laboratórios na lavoura para controlar a população de pragas, assim, estabelecendo um sistema estável e reduzindo os danos econômicos que tais pragas poderiam trazer. Os modelos estudados descrevem uma ampla variedade de sistemas, que variam desde um sistema que apresenta oscilações com amplitudes e periodicidades constantes até sistema que apresentam campos de direções que levam a extinção de uma espécie.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEGON, M; HARPER, J. L; TOWNSEND, C. R. **Ecologia: de indivíduos a ecossistemas. Editora** Artmed: Porto Alegre, 2007.

BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. LTC: Rio de Janeiro, 2006.

SOBRINHO, A. S. O; et. al. **Modelagem Matemática e Estabilidade de Sistemas Predador-Presa**, 2015. Disponível em: < https://arxiv.org/abs/1504.06244> acesso: 15 de set. 2017.

TOMÉ, T; OLIVEIRA, M. J. **Dinâmica estocástica e irreversibilidade**. EDUSP: São Paulo, 2001.

MOREIRA, M. A; SILVA, J. M. Estudo da interação entre peixes presas e predadores no vale do Mucuri. **Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional**, 2012.