

# Um programa computacional para classificar o conjunto assintótico associado a uma aplicação polinomial

Ronaldo César de Paiva, Nguyen Thi Bich Thuy. Universidade Estadual Paulista. E-mail: ronaldo.paiva@unesp.br

Palavras Chave: conjunto assintótico, aplicações polinomiais, software classificador.

## Introdução

A geometria do conjunto assintótico associado a uma aplicação polinomial dominante foi estudada por Jelonek [1, 2, 3]. Ele bem descreveu o conjunto assintótico e demonstrou que o conjunto assintótico de uma aplicação polinomial dominante é uma variedade de dimensão complexa  $n - 1$ . Em [4], a autora introduziu um algoritmo para classificar o conjunto assintótico associado a uma aplicação polinomial dominante  $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Neste trabalho, iremos produzir um programa capaz de verificar o conjunto assintótico associado a uma aplicação polinomial  $F: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ . O programa foi desenvolvido em linguagem *Python* devido à sua versatilidade e grande difusão no meio científico [5].

## Objetivos

O objetivo deste trabalho é produzir um programa capaz de determinar o conjunto assintótico associado a uma aplicação polinomial  $F: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  e para com isso verificar os resultados obtidos a partir do algoritmo introduzido em [4].

## Materiais e Métodos

A partir do levantamento bibliográfico sobre aplicações polinomiais e conjuntos assintóticos associados, aplicamos a definição de conjunto assintótico para determinar o conjunto assintótico associado a diversas aplicações polinomiais  $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , com  $n$  variando de 2 a 5. A partir destes exemplos, organizamos o algoritmo que o programa classificador deveria seguir: inicialmente, o programa solicita a aplicação polinomial  $F: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  de interesse, após isso, solicita uma sequência genérica  $\{\xi_k\}$ ; em seguida, o programa verifica se a sequência genérica  $\{\xi_k\}$  tende para o infinito, que é a condição imposta pela definição do conjunto assintótico; caso a condição não seja satisfeita, o programa avisa o usuário, caso contrário, o programa continua e determina se  $F(\xi_k)$  não tende ao infinito, em caso positivo, o programa calcula o limite de  $F(\xi_k)$

quando  $k \rightarrow \infty$  que quando  $F(\xi_k)$  não tende ao infinito, nos dá o conjunto assintótico associado a aplicação polinomial inserida. O programa foi desenvolvido em *Python*, utilizando a distribuição *Python*, gratuita e de código-aberto, Anaconda associada ao software Microsoft Visual Studio.

## Resultados e Discussão

A partir dos estudos realizados sobre aplicações polinomiais e conjuntos assintóticos, fomos capazes de produzir um programa em *Python* capaz de determinar o conjunto assintótico associado a uma aplicação polinomial  $F: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ . Os resultados obtidos estão em conformidade com os resultados trazidos por [1,2,3,4].

**Exemplo:** Determinar o conjunto assintótico associado a aplicação polinomial  $F: \mathbb{C}^3(x,y,z) \rightarrow \mathbb{C}^3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  definida por  $F(x, y, z) = (xy, yz, 4xy + 5yz + y + 4)$  para uma sequência genérica  $\xi_k = (\alpha k^r, \beta/k^r, \gamma k^r)$ .

Figura 1 – Funcionamento do programa classificador produzido para determinar o conjunto assintótico associado a uma aplicação polinomial.

```

limit(f1(x,y,z),x,oo) #coordenada x_k de F(x_k, y_k, z_k)
hr
limit(f2(x,y,z),x,oo) #coordenada y_k de F(x_k, y_k, z_k)
hr
limit(f3(x,y,z),x,oo) #coordenada z_k de F(x_k, y_k, z_k)
4N1 + 5N1 + 4
a1 = limit(f1(x,y,z),x,oo)
a2 = limit(f2(x,y,z),x,oo)
a3 = limit(f3(x,y,z),x,oo)

print("O subconjunto do conjunto assintótico da aplicação polinomial F(x,y,z), considerando a sequência inserida é a1 = %s, a2 = %s e a3 = %s" % (a1, a2, a3))

```

Fonte: Printscreen Jupyter Notebook no navegador Mozilla Firefox.

Como podemos ver na figura acima, para uma dada sequência  $\{\xi_k\}$  que tende ao infinito, o programa verifica se  $F(\xi_k)$  não tende ao infinito. E em caso positivo, o programa determina o conjunto assintótico da aplicação que é justamente o  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(\xi_k)$ . O programa nos dá que o conjunto assintótico da aplicação  $F: \mathbb{C}^3(x,y,z) \rightarrow \mathbb{C}^3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  é o plano  $\alpha_3 = 4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4$ . O resultado está em conformidade com a descrição feita por Jelonek [1, 2, 3], já que a dimensão do conjunto assintótico é 2 (um plano),

ou seja,  $n - 1$ . Segundo o algoritmo introduzido em [4], uma aplicação polinomial  $F: \mathbb{C}^3_{(x,y,z)} \rightarrow \mathbb{C}^3_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$  definida por  $F(x, y, z) = (xy, yz, r_1xy + r_2yz + g(y) + r_4)$ , onde  $r_1, r_2, r_4 \in \mathbb{C}$  e  $g(y)$  é um polinômio linear com termo independente igual a 0, tem como conjunto assintótico o plano de equação  $\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$ . Este é o caso da aplicação  $F(x, y, z) = (xy, yz, 4xy + 5yz + y + 4)$ , onde  $r_1 = r_4 = 4$ ,  $r_2 = 5$  e  $g(y) = y$ . Portanto, segundo [4], o conjunto assintótico associado a aplicação  $F(x, y, z) = (xy, yz, 4xy + 5yz + y + 4)$  é justamente o plano  $\alpha_3 = 4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4$ . Isto mostra que o resultado obtido pelo programa está em conformidade com os resultados apresentados em [1, 2, 3, 4].

## Conclusões

O código produzido é capaz de determinar o conjunto assintótico associado a aplicações polinomiais  $F: \mathbb{C}^3_{(x,y,z)} \rightarrow \mathbb{C}^3_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$ . Os resultados obtidos estão em conformidade com a literatura, portanto, podemos dizer que fomos capazes de verificar os resultados em [4].

## Bibliografia

- [1] JELONEK, Z., *The set of points at which a polynomial map is not proper*, Annales Polonici Mathematici. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 1993. p. 259-266.
- [2] JELONEK, Z., *Testing sets for properness of polynomial mappings*, Mathematische Annalen, v.315, n.1, p. 1-35, 1999.
- [3] JELONEK, Z., *Geometry of real polynomial Mappings*, Mathematische Zeitschrift, v. 239, n. 2, p. 321-333, 2002.
- [4] THUY, N.T.B., *An algorithm to classify the asymptotic set associated to a polynomial mapping*, American Journal of Computational Mathematics, 2017, 7, 109-126.
- [5] SANNER, Michel F. et al. Python: a programming language for software integration and development. J Mol Graph Model, v. 17, n. 1, p. 57-61, 1999.